$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{e}{n+1}.$$

et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3)a- Soit $n \in \mathbb{N}^*$; $u_{n+2} = \int_0^1 x^{n+2}e^{1-x^2}dx = \int_0^1 (x^{n+1}).\left(xe^{1-x^2}\right)dx$

Choisissons $\begin{cases} u'(x) = xe^{1-x^2} \\ v(x) = x^{n+1} \end{cases}$ et $\begin{cases} u(x) = \frac{-1}{2}e^{1-x^2} \\ v'(x) = (n+1)x^n \end{cases}$

Ainsi $u_{n+2} = \left[\frac{-1}{2}x^{n+1}e^{1-x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n \frac{-1}{2}e^{1-x^2}dx$

$= \frac{-1}{2} + \frac{n+1}{2}\int_0^1 x^n e^{1-x^2}dx$

$= \left(\frac{n+1}{2}\right)u_n - \frac{1}{2}$.

b- Nommons $\mathscr{A}$ l'aire en unité d'aire de la partie du plan désignée

$\mathscr{A} = \int_0^1 |f(x)|dx = \int_0^1 x^3e^{1-x^2}dx$ **car** $f(x) = x^3e^{1-x^2} \geqslant 0; \forall x \in [0;1]$

$= u_3 = u_{1+2}$

$= \left(\frac{1+1}{2}\right)u_1 - \frac{1}{2}$ **d'après 3)a-**

$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$ **d'après 2)a-**

Conclusion : $\mathscr{A} = -1 + \frac{1}{2}e$.

PROBLEME

A-1)a- $f(O) = I$ et $f(D) = J \Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{IJ}\right)}$ est une mesure de l'angle de f.

- ABC est isocèle en A et $O = B * C$

$\Rightarrow \widehat{OAC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \alpha$.

- ABC est un triangle direct $\Rightarrow$ AOC est aussi un triangle direct

et on vient de voir que $\widehat{OAC} = \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$

donc α est la mesure principale de $\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC}\right)$

alors $\widehat{\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC}\right)} \equiv \alpha \ [2\pi]$.

- $(OI) \perp (AC)$ et $(DJ) \perp (AC) \Rightarrow (OI) // (DJ)$